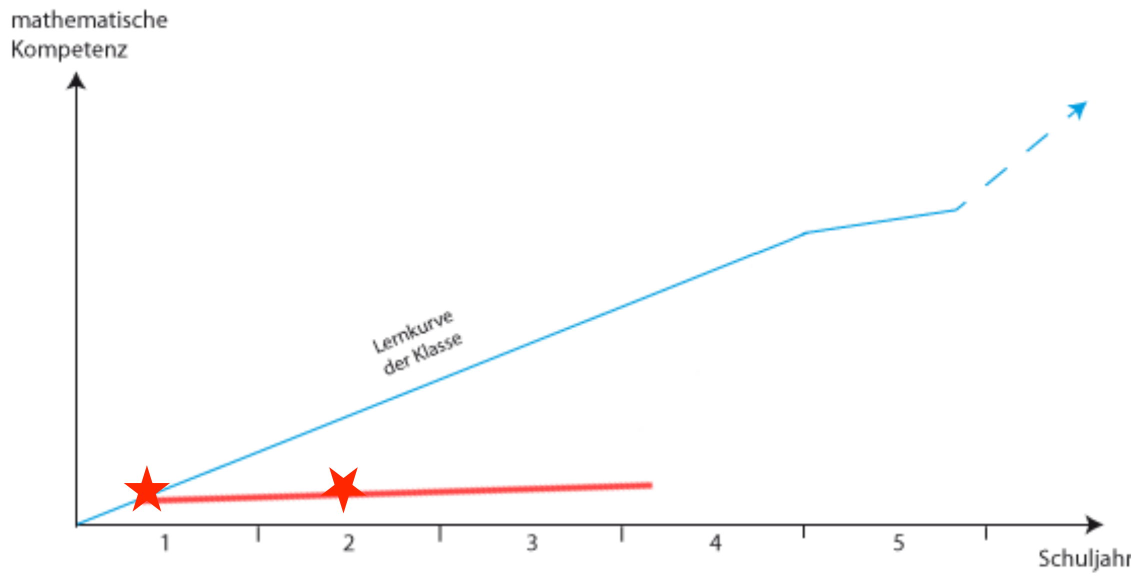
Effiziente Didaktik für das Symptomtraining dyskalkuler Kinder

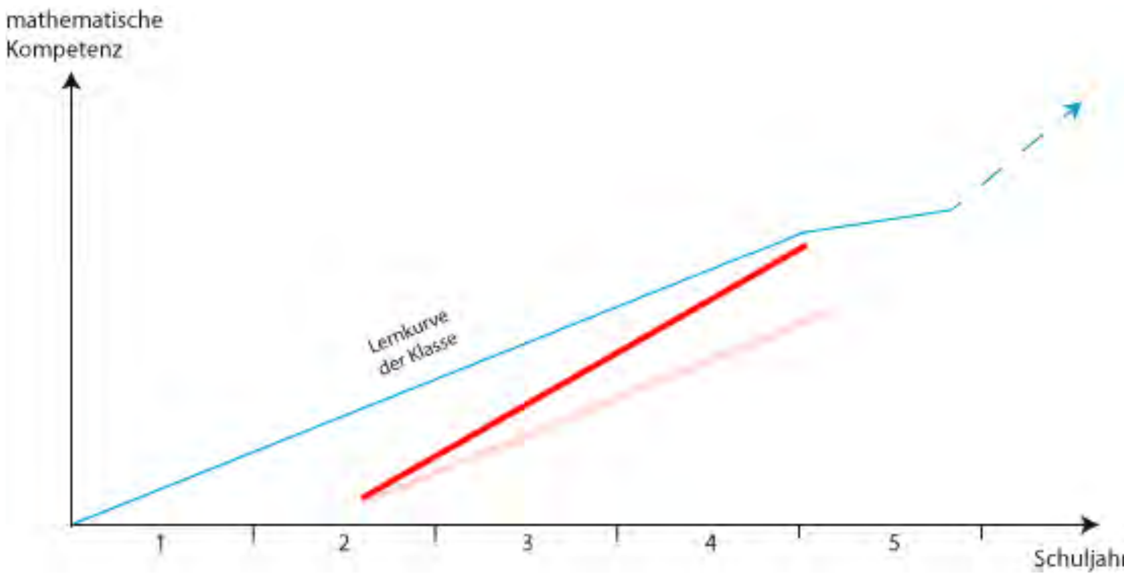
Dipl. Inform. Frank Haub

Ausgangssituation



Keine Steigerung der math. Kompetenz, aber dafür **Kompensationsstrategien**.

Ausgangssituation

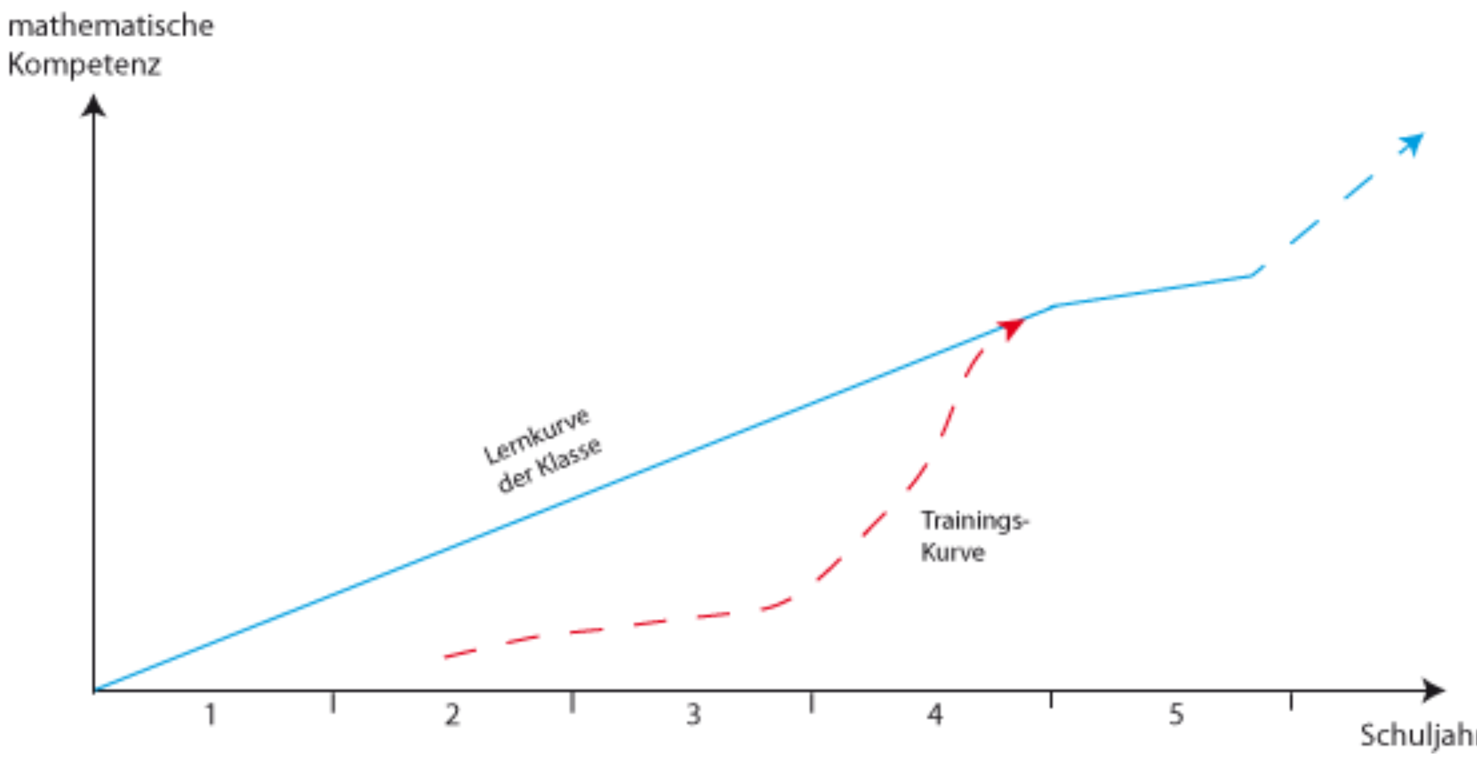


intensiveres Lernen

nutzbare Vorteile

- fortgeschrittenes Alter.
- gesteigertes Verständnis von Zusammenhängen durch zeitnähere Betrachtung der mathematischen Hierarchien.
- überspringen kontraproduktiver Lerninhalte.
- Aufbau einer soliden, transferierbaren mathematischen Basiskompetenz.

erzielbarer Verlauf der Trainingskurve



Voraussetzung für effektives Training

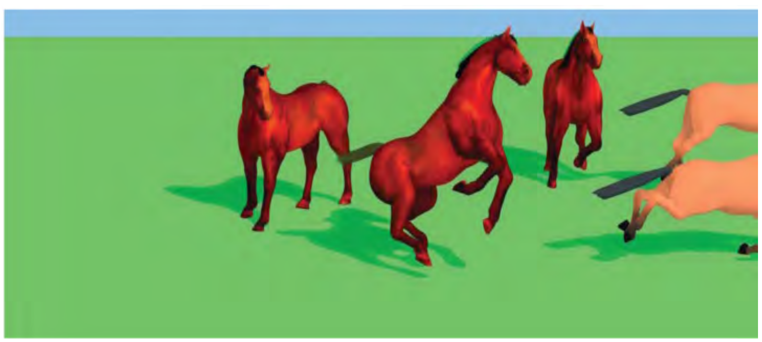
- Lernen muss Spaß machen
  - Dialog und kein Frontalunterricht
  - kleine und kleinste Lernschritte
  - Erfolgserlebnisse in jeder Stunde
  - wenige, „leichte“ Hausaufgaben

- enge Zusammenarbeit mit dem Umfeld der Kinder (Schule, Elternhaus…)
  - Entlastung von den Mathe-Hausaufgaben
  - Lehrer anleiten, wie das Training in der Schule flankiert werden kann
  - rechtlichen Rahmen ausloten, um das Kind seelisch zu schützen
  - Eltern anleiten, wie sie das Training zu Hause unterstützen können

Mathematische Basiskompetenz

Der „Geist“ der Schulmathematik:

Die Schulmathematik bietet Werkzeuge, quantitative und geordnete Zusammenhänge der realen Welt in eine abstrakte Symbolsprache zu überführen, in dieser „Sprache“ zu manipulieren und aus den auf abstrakter Ebene gewonnenen Erkenntnissen Rückschlüsse und Vorhersagen für den Alltag zu treffen.



3 – 2 = 1

5 – 2 = 3

Mathematische Basiskompetenz

- Zahlen repräsentieren quantitative Komponente von Mengen.
- Rechenzeichen symbolisieren Handlungen auf den Mengen.
- Vergleichszeichen stehen für eine Ordnung der Quantitäten.

- Teile/Ganze-Schema

- Kausalitäts-Schema

kontraproduktive Lerninhalte

Zahlenraum bis 20

Kinder lernen die Aufgaben auswendig (ohne Verständnis)

Kompensation:
56 + 28 =

50 + 20 = 70
6 +   8 = 14

= 84

Richtig:
56 + 20 = 76
76 + 8 = 84
(76 + 4+4)

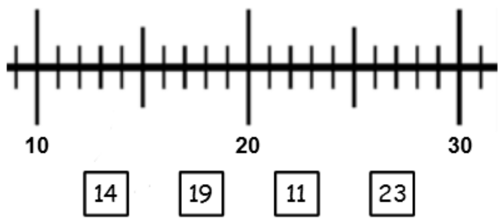
Kompensation:
56 - 28 =

50 - 20 = 30
8 -   6 =   2
----
30 - 2 = 28

Richtig:
56 - 20 = 36
36 - 8 = 28
(36 - 6-2)

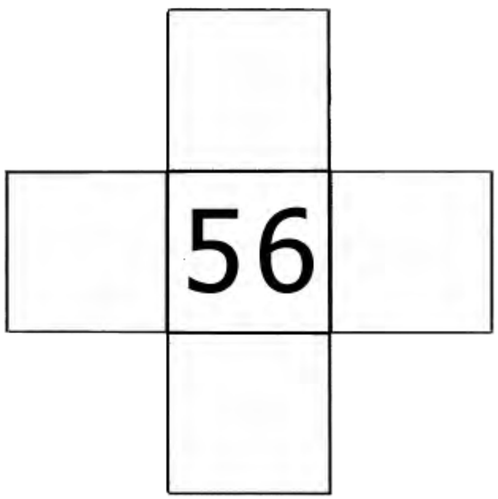
kontraproduktive Lerninhalte

Zahlenstrahl



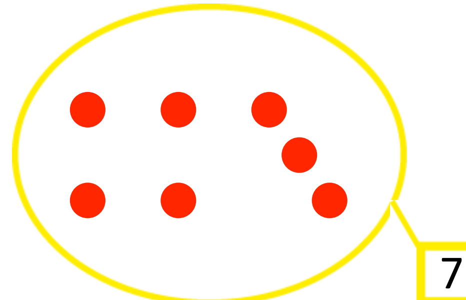
kontraproduktive Lerninhalte

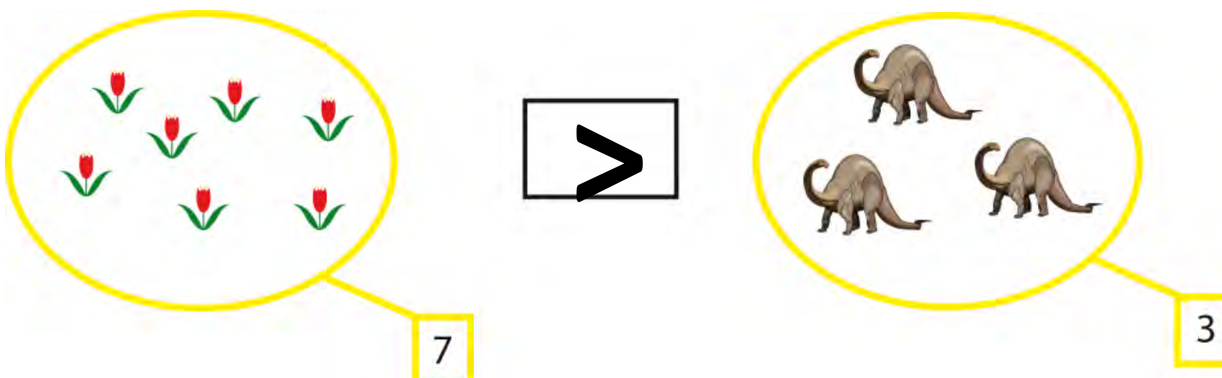
Hundertertafel



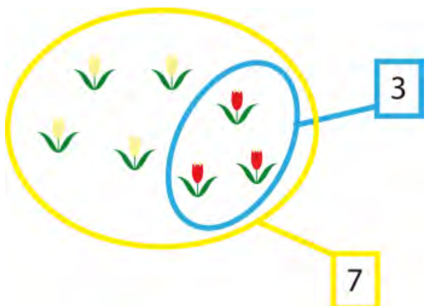
Mathematische Basiskompetenz
„Zahlen repräsentieren Mengen“

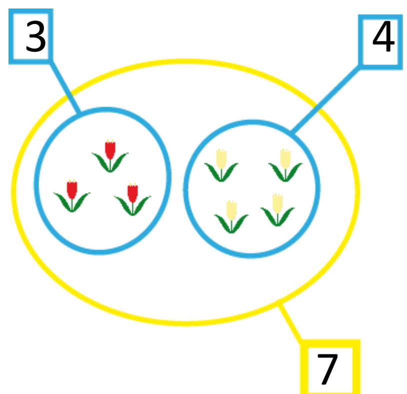
„sieben“ **7**

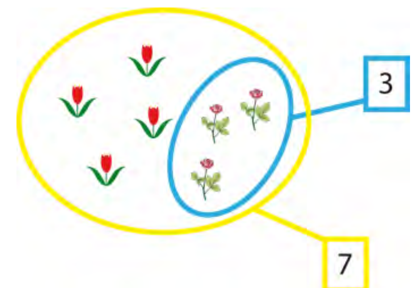


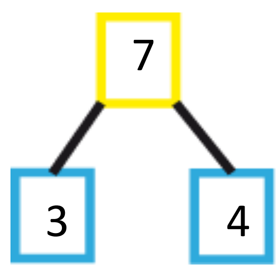


Mathematische Basiskompetenz
„Teile/Ganze - Schema“

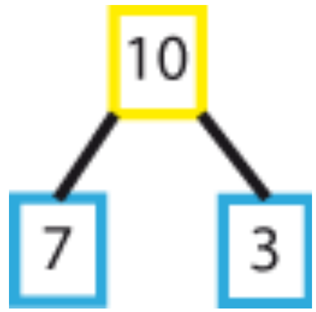






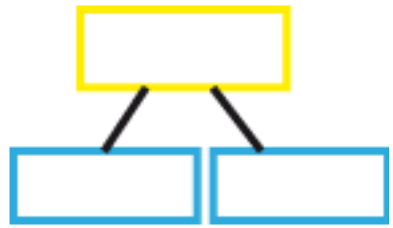


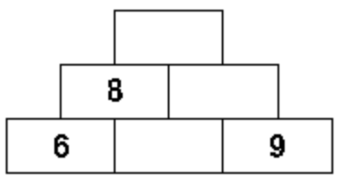
Mathematische Basiskompetenz „Operationen + und -“

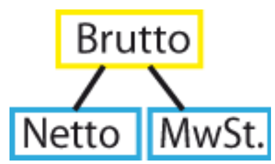


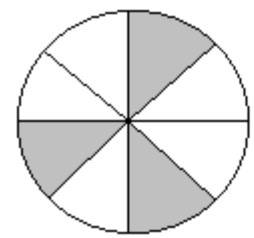
7 + 3 = 10
3 + 7 = 10
10 – 7 = 3
10 – 3 = 7

Mathematische Basiskompetenz
„Teile/Ganze - Schema“





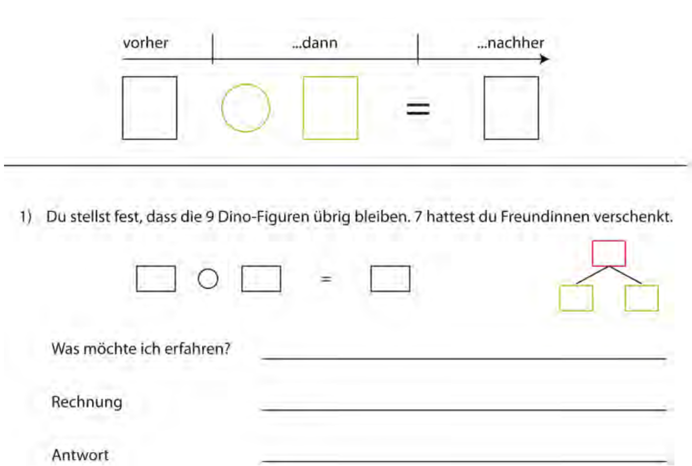




Melanie hat 72 Fische in ihrem Aquarium. Ihrer Freundin schenkt sie zum Geburtstag 24 Fische. Wie viele Fische bleiben ihr noch?

An einer Bootsfahrt beteiligten sich 56 Erwachsene und 18 Kinder. Wie viele Personen nahmen an dieser Bootsfahrt teil?

Mathematische Basiskompetenz „Kausalität“

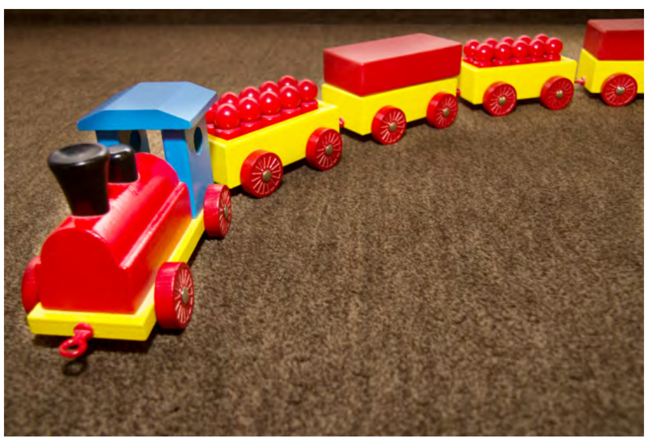


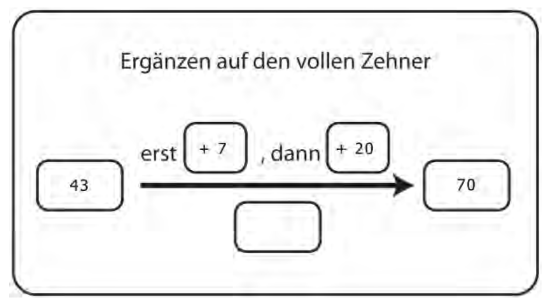
Mathematische Basiskompetenz „dekadisches Zahlensystem“

Z	E

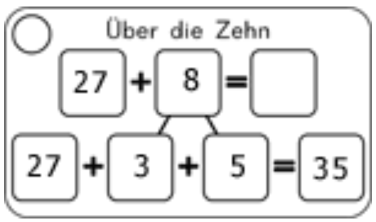
Wie heißt die Zahl?

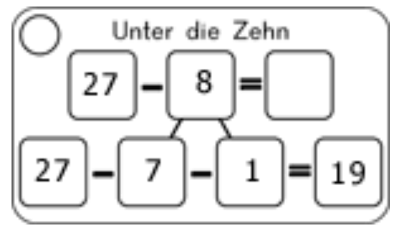
fünfzehn	______	21 E 7 Z	______
3 Z 5 E	______	neununddreißig	______
40 + 8	______	8 E 0 Z	______
8 E 6 Z	______	4 Z 13 E	______
9 Z 0 E	______	zweiundvierzig	______

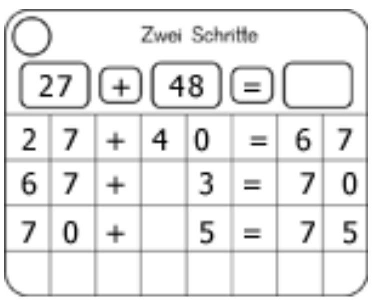


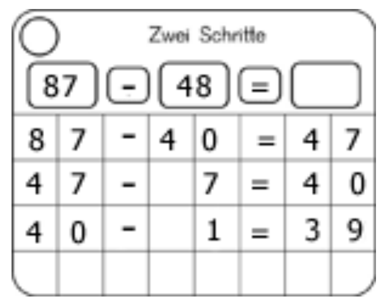


Mathematische Basiskompetenz „dekadisches Zahlensystem“

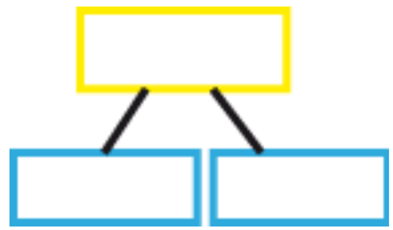


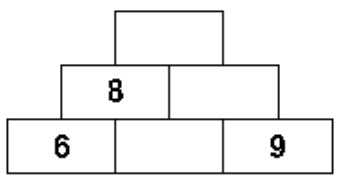


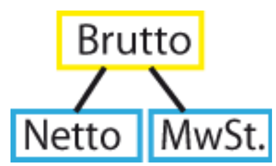


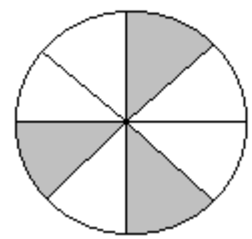


Mathematische Basiskompetenz „Teile/Ganze - Schema“







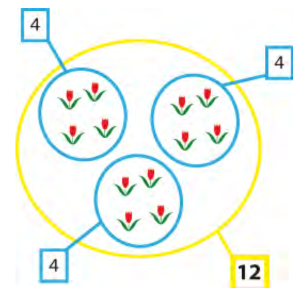


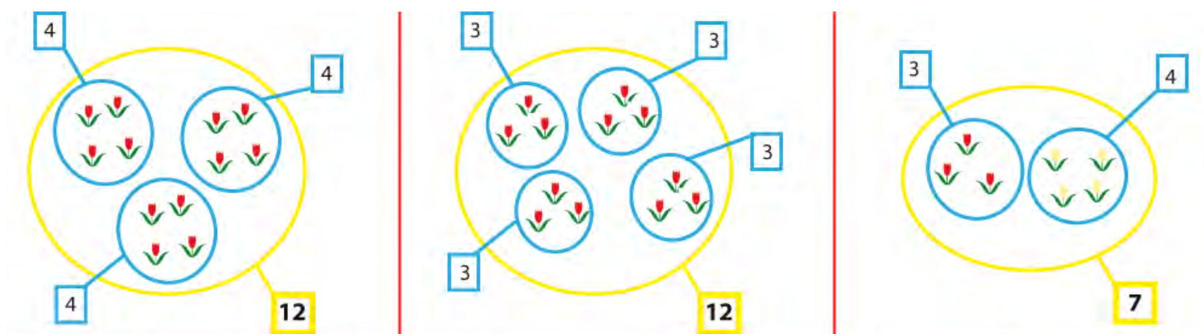
Melanie hat 72 Fische in ihrem Aquarium. Ihrer Freundin schenkt sie zum Geburtstag 24 Fische. Wie viele Fische bleiben ihr noch?

An einer Bootsfahrt beteiligten sich 56 Erwachsene und 18 Kinder. Wie viele Personen nahmen an dieser Bootsfahrt teil?

Mathematische Basiskompetenz
„ Multiplikation“

3 x 4 = 12



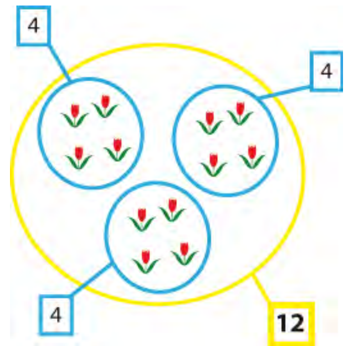


$3 \cdot 4 =$	$4 \cdot 3 =$	$3+4 =$

Mathematische Basiskompetenz „ Division“

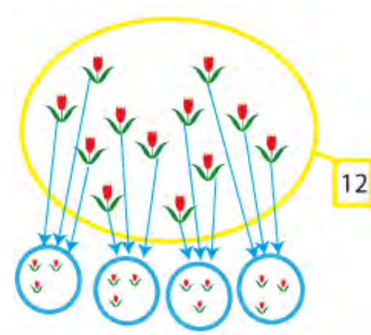
Ich habe 12 Tulpen. Immer vier sollen in einen Blumenkasten gepflanzt werden.

12 : 4 = 3



12 Tulpen sollen auf vier Blumenkästen verteilt werden.

12 : 4 = 3



Begleitende Anmerkungen

zum Vortrag

„Effiziente Didaktik für das Symptomtraining dyskalkuler Kinder“

Dipl. Inform. Frank Haub

I. Die Aufgabe des Dyskalkulie-Trainers beim Symptomtraining

Wenn das Training der Aufmerksamkeit und der Sinneswahrnehmungen in gewissem Grade zu einer besseren Aufnahmefähigkeit der Kinder geführt hat, steht für den Trainer eine weitere anspruchsvolle Aufgabe an: Die mathematischen Fehlleistungen müssen im Symptomtraining korrigiert werden. Ziel sollte es hierbei sein, dass in absehbarer Zeit die mathematische Kompetenz der Kinder nicht mehr wesentlich von denen der Klassenkameraden abweicht, die Kinder im Klassenverbind also nicht mehr auffällig sind.

Beim aktuellen Schulstoff einzusteigen wäre gewiss die falsche Strategie. Die Kinder sind schon längst aus der Mathematik „ausgestiegen", habe eine mehr oder weniger lange Phase der Kompensationsstrategien, der Rechenschemata mit denen sie halbwegs über die Runden kommen, hinter sich und sind auch während der AF-Trainings nicht automatisch zu verständigen Mathematikern geworden. In Wahrheit sind sie weit hinter dem aktuellen Schulstoff zurück und verstehen von den in der Schule behandelten Themen so gut wie nichts. Ihre Vorstellung von der Materie weicht stark von der tatsächlichen Mathematik ab, auch wenn die Kinder selbst ihre Strategien logisch finden und an ihnen festhalten. Die Kinder haben die Mathematik bislang missverstanden und müssen eigentlich von Null anfangen. Mehr noch: Die eingepaukten Kompensationsstrategien müssen ad absurdum geführt werden, was gerade bei den Kindern nicht leicht ist, die sich die Strategien mühsam selbst ergründet haben.

Mit den Methoden der Schulmathematik vorzugehen, beginnend beim ersten Schuljahr, klingt erfolgsversprechender. Allerdings sind die, von den regulären Schulbüchern vorgegebenen Lernschritte nicht unbedingt geeignet, um die im Lernstoff immer weiter fortschreitende Klasse wieder einzuholen. Es sei denn, man fordert von den Kindern einen immens höheren Lernaufwand ein. Aber noch mehr lernen? Und das auch noch gerade in Mathe? Die betroffenen Kinder haben bis zur Entlarvung ihrer Dyskalkulie schon so viele nicht verstandene Dinge pauken und auswendig lernen müssen, dass die Themen „Mathematik" und „Zahlen" negativ besetzt sind. Die Bereitschaft noch einmal die Beine in die Hand zu nehmen, geht gegen Null.

Gut wäre eine Methode, die wenig Lernaufwand erfordert, am Ende sogar Spaß macht und die Kinder dabei, durch das Festigen des Verständnisses für die mathematischen Grundlagen die Mathematik aus einem anderen Blickwinkel neu erlernen lässt. Spaß ist dabei ein wichtiger Faktor, und den erreicht man bei Kindern, indem man ihnen Erfolgserlebnisse vermittelt. Deshalb zu einem wichtigen Grundsatz:

<u>Keine Symptom-Trainingsstunde sollte ohne ein Erfolgserlebnis für das Kind zu Ende gehen</u>.

Die Lernschritte und die Anforderung sind genügend klein zu wählen, so dass das Kind in der Lage ist, durch eigene Überlegung zu einer neuen mathematischen Erkenntnis zu gelangen, auch wenn diese Erkenntnis für den Außenstehenden zunächst belanglos und unbedeutend erscheinen mag.

Nutzbare Vorteile für den Trainer

Um die „Aufholjagd“ zu gestalten, werden uns Trainern, alleine durch die Sachlage einige wichtige Vorteile für das erneute Lernen der Mathematik in die Hand gespielt, die wir auf keinen Fall vergeuden oder missachten sollten.

Vorteil 1:
Die Kinder haben durch das fortgeschrittene Alter und der damit verbundenen fortgeschritten geistigen Entwicklung, bereits eine höhere Abstraktionsfähigkeit erreicht, als z.B. ein Erstklässler. Viele Sachzusammenhänge sind für sie dadurch spontan einleuchtender. Das Umschalten von Realität zur abstrakten Symbolik gelingt leichter.

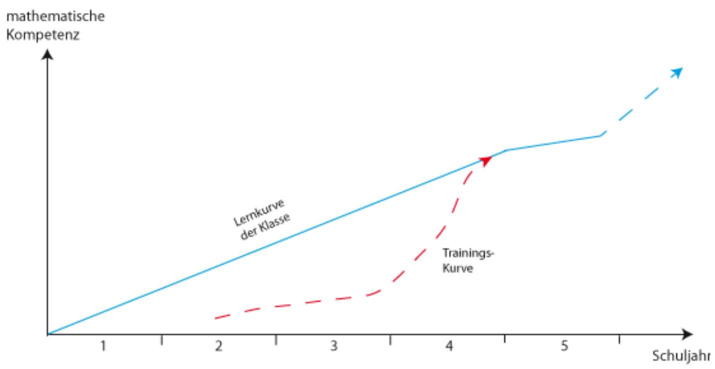
Vorteil 2:
In den Mathematik-Schulbüchern werden teilweise für dyskalkule Schüler kontraproduktive Lerninhalte abgehandelt, die mit dem eigentlichen Verstehen der Mathematik nicht viel zu tun haben (Rechnen bis 20, Zahlenstrahl, Hundertertafel…). Die kann man zunächst getrost überspringen, ohne das Erlangen der mathematischen Kompetenz zu gefährden.

Vorteil 3:
Durch das zeitnähere und ganzheitliche Durchschreiten einzelner Themenbereiche werden die Zusammenhänge zwischen den Themen sehr viel bewusster wahrgenommen.

Vorteil 4:
Es gibt eine kleine Menge transferierbarer Grundlagen, die sehr einfach auf höhere mathematische Hierarchie-Stufen übertragen werden können und so dort das Rechnen, eben durch die Reflexion auf die Grundlagen, leicht erlernen lassen.

Vorteil 5:
Das 5. Schuljahr enthält viele Wiederholungen aus den vorangegangenen Klassen, so dass der Zuwachs an mathematischer Kompetenz hier reduziert ist. So kann man schneller aufholen.

Das erwünschte Resultat:



Die blaue Kurve zeigt die Lernkurve der Klasse, die rote eine beispielhafte Kurve bei idealem Training.
Das Training befasst sich längere Zeit mit den mathematischen Grundlagen (in dem Fall bis Ende 3. Schuljahr und kann durch transferieren der Grundlagen schließlich zügig an die blaue Kurve anschließen.

II. Zweck der Schulmathematik

Zunächst einmal sollte man sich den Zweck der Schulmathematik vor Augen halten:

Die Schulmathematik bietet Werkzeuge, quantitative und geordnete Zusammenhänge der realen Welt in eine abstrakte Symbolsprache zu überführen, in dieser „Sprache“ zu manipulieren und aus den auf abstrakter Ebene gewonnenen Erkenntnissen Rückschlüsse und Vorhersagen für den Alltag zu treffen.

Wesentliche Stichworte sind hier „reale Welt“ und „Alltag“. Nicht die im Schulunterricht überwiegend verwendeten Symbole und Ziffern sind der eigentliche Kernpunkt der Schulmathematik, sondern die „Stories“, aus denen letztendlich mathematische Terme gewonnen werden.

III. Mathematik missverstehen

Dieser eben erwähnte Zweck der Mathematik, oder genauer der Zusammenhang zwischen Alltag und Mathematik, wird heutzutage leider nur sehr kurz, sprich in den ersten Wochen der Schule, vermittelt. Danach wird überwiegend auf symbolischer Ebene gearbeitet. Wenn man in den ersten Wochen aufgrund von verminderter Aufmerksamkeit, differenzierten Sinneswahrnehmungen oder auch anderer Gründe den „Geist der Mathematik“ nicht erfassen kann, bleibt man womöglich bei der Auffassung stehen, Mathematik sei eine rein abstrakte symbolische Welt, bestehend aus geordneten Zahlsymbolen und aus Rechenzeichen. Man missversteht die Rechenzeichen als Vorgaben dafür, die Zahlenfolge vorwärts oder rückwärts aufzusagen.

Mit dieser ordinalen Zahlenvorstellung kommen die meisten Kinder in unser Dyskalkulie-Training. Zahlen sind für sie wie Buchstaben – abstrakte Symbole, die mit einem Lautklang artikuliert werden und in einem Zahlenalphabeth geordnet sind. Plus und Minus bedeuten für sie Hoch- und Runter zählen in diesem Zahlenalphabeth.

Weitere Missverständnisse können auftreten bei dem Verständnis für das Teile-/Ganze-Gefüge, der Möglichkeit der Bündelung von kleineren in eine größere Einheit, der tabellarischen Schreibweise unseres dekadischen Zahlensystems, der Missdeutung von Operationen oder ähnlichem.

- **Zahlen repräsentieren tatsächlich jedoch die quantitative Komponente von Mengen.**
- **Rechenzeichen symbolisieren Handlungen auf den Mengen**
- **Vergleichszeichen (<, =, >)stehen für eine Ordnung der Quantitäten.**

IV. Attribute und Mengen

Die Schulmathematik sollte an den Alltag geknüpft sein. In den meisten Fällen müssen wir davon ausgehen, dass die dyskalkulen Kinder diesen Zusammenhang nicht verinnerlicht haben. So sieht man sich häufig mit folgender Testsituation und ihrer Lösung konfrontiert:

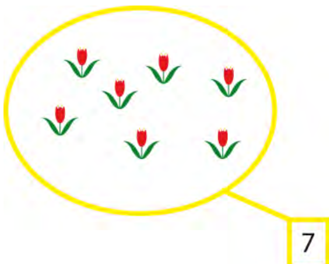
Finde die passende Rechenaufgabe:

3 - 2 = 1 (?)

In der von vielen dyskalkulen Kindern generierten Lösung werden zwar Mengen erkannt und deren Quantität mit Zahlen benannt, aber die Überführung der „Story" in einen mathematischen Term gelingt nicht. Weder die zugrunde liegende Gesamtmenge wird erkannt, noch das Teile/Ganze-Gefüge. Eine, in der Geschichte nicht vorkommende Menge, die 1, wird hinzu erfunden. Auf die Frage, was den die „1" in der Geschichte bedeute, lautet die pragmatische Antwort nicht selten: „Das ist das Ergebnis!"
Richtig wäre hier: Insgesamt waren es fünf Pferde, davon läuft ein Teil, nämlich zwei, weg und am Ende bleiben drei übrig: 5-2=3.
Diese alltagsbezogene mathematische Denkweise müssen die betroffenen Kinder erst neu erlernen und das gelingt am besten, wenn wir ganz am Anfang starten.

V. Die Menge

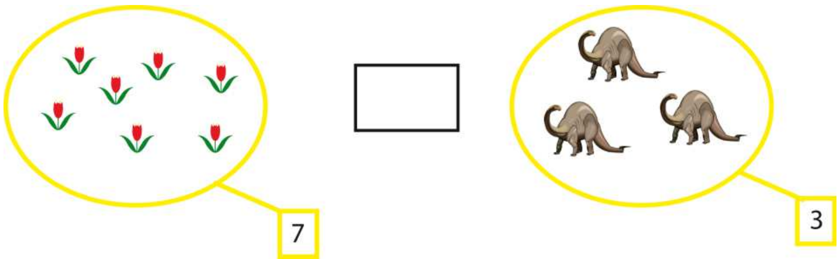
Wir starten im Zahlenraum bis 10. Die verwendete Ziffer für eine Menge entspricht der gemeinten Zahl. Eine Fehlinterpretation, wie bei mehrstelligen Zahlen ist so nicht möglich und die leichte Abzählbarkeit erleichtert das Überprüfen der gewonnenen Erkenntnisse. Solange es haltbar ist, sollte man die Zahlen nicht als isoliertes abstraktes Symbol behandeln, sondern die Zahlen immer in Kombination mit einem Begriff aus dem Alltag verwenden. Nennen sie eine Zahl, z.B. fünf, immer mit einem Attribut: „5 Pferde", „5 Affen", „5 Bananen"... Die Zahl repräsentiert immer eine abzählbare Menge, ein Attribut spezifiziert die Objekte der Menge. Eine Menge kann man grafisch leicht mit einem farbigen Kreis ausdrücken, der mit einem Etikett versehen sein könnte. Dieses Etikett erhält dann die Quantität, die so immer mit der im Kreis befindlichen Menge von Objekten verbunden ist.
In einem ersten „Spiel" kann man die Größe „seiner" Menge mit einem 10er-Würfel ermitteln lassen. Das Kind soll nun bestimmen, was der Außenkreis in seiner „Story" symbolisiert und welche Objekte darin enthalten sein sollen. Es wird nicht gerechnet, sondern nur erzählt. Lassen sie dem Kind die Zeit, die Objekte in der genannten Anzahl in den Kreis zu zeichnen.



Z.B.: 7 wird gewürfelt: „Ich habe ein Blumenbeet. In dem Beet sind 7 Tulpen."

Die 7 Tulpen sollen dann vom Kind eingezeichnet werden. Haben sie Geduld. Anfangs wird sehr sorgfältig gezeichnet.

Erfinden sie danach eine eigene Geschichte mit einer eigenen erwürfelten Zahl und platzieren sie diese mit ein wenig Abstand neben dem Kreis des Kindes. Zum Beispiel 3 Dinosaurier im Jurassic-Park.



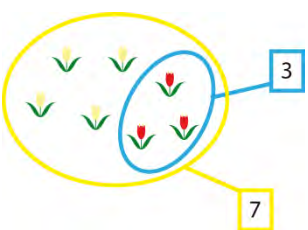
Jetzt eröffnen wir das Quiz: „Wer hat mehr?“ – „Wieso sind 7 Tulpen mehr, als 3 riesige Dinosaurier?“ ... Danach zeichnen sie ein Rechteck zwischen die beiden Mengenkreise. Der Auftrag an das Kind: „Dazwischen gehört ein Zeichen. Welches Zeichen könnte denn dahin gehören? Welche Zeichen kennst du denn noch, die in der Mathematik vorkommen?“

In diesem Fall ist das „>“-Zeichen gesucht. Diskutieren sie wohlwollend bei Fehlversuchen darüber, warum ein falsch eingefügtes Zeichen nicht ganz schlüssig sein kann und leiten sie das Kind zum richtigen Ergebnis. Es soll schließlich das richtige Zeichen finden, mit der Auffassung die Aufgabe eigenständig gelöst zu haben. Lassen sie das Kind erarbeiten, wie es sich die Richtung des „>“- und „<“ – Zeichens merken kann.

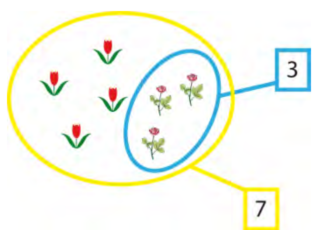
Im Übrigen ist auch ein Gleichheitszeichen ein Vergleichszeichen und besagt, dass die rechte und linke Seite die gleiche Quantität haben. Viele Kinder setzen das Gleichheitszeichen mit einem Ergebnis gleich. Dass es nicht so ist, zeigen in Schulbüchern oft verwendete „verdrehte“ Schreibweisen wie „3 = 8-5“ oder auch „4+1 = 7-2“.

VI. Die Teilmenge

Im nächsten Schritt kommt die erste eigentliche Hürde. Das Bilden von Teilmengen.
Intuitiv gelingt dies, wenn man einen Teil der im Mengenkreis gezeichneten Objekte mit einer anderen Farbe umkreist und mit einem weiteren Etikett versieht. Die verbale Herausforderung: „Was könnte an diesen eingekreisten Objekten besonders sein?“ Hier soll ein weiteres Attribut, wie z.B. eine Farbe aufgeführt werden, oder aber die Objekte werden verschieden typisiert (Ober-, Unterbegriff).



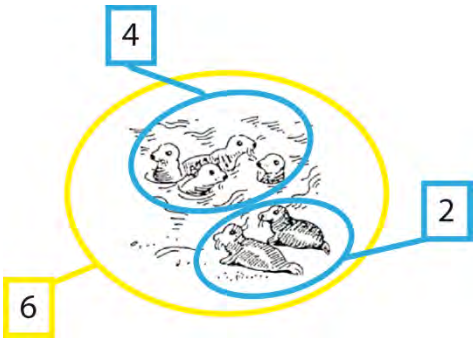
In meinem Beet stehen 7 Tulpen, 3 davon sind rot. *(zusätzliches Farb-Attribut)*
oder: In meinem Beet stehen 7 Blumen, 3 davon sind Rosen *(Ober-, Unterbegriff)*



VII. Zwei Teilmengen (Zahlzerlegung)

Jetzt ist man nicht mehr weit von einer der wichtigsten Grundlagen entfernt, der **<u>Zahlzerlegung</u>**. Die Zahlzerlegung und die damit einhergehende Erkenntnis, dass sich eine Ganzes vollständig in Teile zerlegen lässt oder umgekehrt, dass mehrere Teile ein Ganzes bilden können, ist die Basis, um alle weiteren Rechen- und Lösungsmethoden zu verstehen.

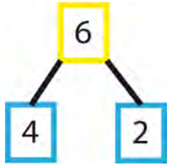
Der nächste Schritt wäre die Zerlegung einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen:



„Im Zoo sind 6 Seehunde. 4 davon sind im Wasser… Was ist mit den anderen und wie viele sind es?“

Man sieht: die insgesamt 6 Seehunde lassen sich aufteilen in 4, die im Wasser sind und 2 die an Land liegen:

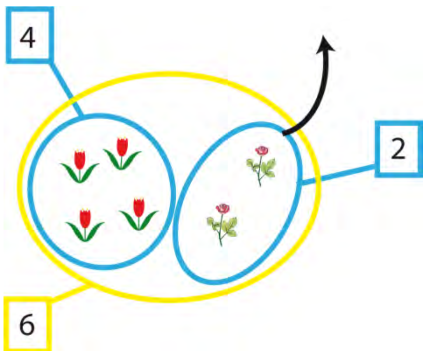
6 besteht aus 4 und 2



Sehr viele Kinder werden hier von selber die zugrunde liegende Plus-Operation herausfinden, denn sie brennen mittlerweile darauf im Training irgendetwas zu rechnen. Und das können sie jetzt und zwar unmittelbar mit der verbindenden Geschichte: „Die zwei Seehunde an Land robben zu den 4, die bereits im Wasser schwimmen.“

4 Seehunde + 2 Seehunde = 6 Seehunde

Eine kleine grafische Ergänzung, ein nach außen gerichteter Pfeil, führt die Kinder zur nächsten Operation, der Subtraktion:



„Im Blumenbeet stehen 6 Blumen. Was geschieht mit den zweien, die mit einem Pfeil nach außen versehen sind? Was geschieht mit den anderen? Welches Zeichen gibt es in der Mathematik für diesen Vorgang?“

Dieser Pfeil symbolisiert ein Verschwinden, z.B. durch Pflücken oder Verwelken. Das passende Rechenzeichen ist das „Minus“.

6 Blumen - 2 Rosen = 4 Blumen

Nach wie vor sind die Attribute wichtig. Dass man hier nicht in ein Dilemma gerät, wird durch die vorgestellte Vorgehensweise, mit der Gesamtmenge zu beginnen und diese dann in Teilmengen aufzuteilen, gewährleistet.
Würde man nicht von der Gesamtmenge ausgehen, sondern mit zwei Teilmengen beginnen, ist die Gefahr gegeben, dass das Kind mit zwei Teilmengen operieren möchte, mit denen sich nicht rechnen lässt. Nehmen wir zum Beispiel die Mengen {3 Elefanten} und {2 Tüten Milch}. Welches Ergebnis sollte hier 3 Elefanten + 2 Milchtüten produzieren, oder was käme heraus, wenn man von 3 Elefanten 2 Milchtüten subtrahierte?

Die Attribute der Teilmengen müssen also immer so gewählt werden, dass eine Obermenge benannt werden kann, - der „Oberbegriff". Auch diese Erkenntnis kommt einem später in der weiterführenden Schule zu Gute, nämlich bei der Bruchrechnung. Die Nenner der Brüche können als Attribute aufgefasst werden. „Viertel" und „Drittel" sind beispielsweise zwei Attribute, die nicht zusammenpassen, so dass man nicht ohne weiteres „2(/4) – 1(/3)" rechnen kann. Erst durch das Finden eines Oberbegriffs, eines **gemeinsamen Nenners**, kann diese Rechnung ausgeführt werden.

Ein Test, ob der Zusammenhang zwischen Alltag und Mathematik verstanden ist, kann durch folgende Aufgaben erfolgen. Bei Verständnisschwierigkeiten sollte man immer auf das Zeichnen von Mengenskizzen zurückgreifen:

5 Tannen und 5 Buchen sind zusammen: 10____________________________
3 Pferde und 2 Kühe sind zusammen: __________________________________
2 Mädchen und 4 ___________________________ sind zusammen: 6 Kinder
2 Rosen und 5 ____________________________ sind zusammen: 7 Blumen
5 Lastwagen und 2 _________________________ sind zusammen: ___ Fahrzeuge
2 Männer und __Frauen sind zusammen: 4 Erwachsene
3 ____________________________ und 3 Röcke sind zusammen : 6 Kleidungsstücke
6 ____________________ und ____Lokomotiven sind zusammen: 10 Fahrzeuge
1 ____________________ und ____Indianer sind zusammen 4 Menschen
Basketballer und 2 _________________________ sind zusammen: 6 Sportler
Puppen und 5 ______________________________ sind zusammen: 8 Spielsachen
___________________________ und 5 Tiger sind zusammen: 7 Tiere
___________________________ und 4 Hauskatzen sind zusammen: 10 Haustiere

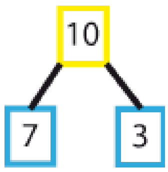
Manche Aufgaben sind Unsinn, man kann sie nicht rechnen. Streiche diese Aufgaben durch.

10 Kinder sind da, davon laufen 4 Mädchen weg. Es bleiben übrig: _____________________________
8 Gebäude sind da, 2 Häuser werden abgerissen. Es bleiben übrig: _____________________________
5 Katzen sind da, 3 Sterne verglühen. Es bleiben übrig: _____________________________________
10 Spielsachen, 3 Puppen werden gestohlen. Es bleiben übrig: _________________________________
7 Kleidungsstücke, 5 Tiger rennen weg. Es bleiben übrig: _____________________________________
7 Tiere, 5 Tiger rennen weg. Es bleiben übrig: ____
3 Tiere, minus 2 Autos. Es bleiben übrig: ____
10 LKW, minus 5 Hefte. Es bleiben übrig: ____

VIII. Zahlzerlegung und Operationen gehören zusammen

Sowohl additive, als auch subtraktive Geschichten lassen sich in die Zahlzerlegung überführen. Das Zahlentripple einer Zahlzerlegung repräsentiert neben der eigentlichen Zerlegung zwei Plus- und zwei Minusaufgaben.

z.B. „10 besteht aus 7 und 3".



Im additiven Fall werden die beiden Teilmengen zu einer Gesamtmenge ergänzt, bei der Subtraktion wird aus der Gesamtmenge ein Teil herausgelöst, so dass der andere Teil übrig bleibt.

Aus dieser Zahlzerlegung lassen sich die vier Basisoperationen ableiten:

7 + 3 = 10
3 + 7 = 10

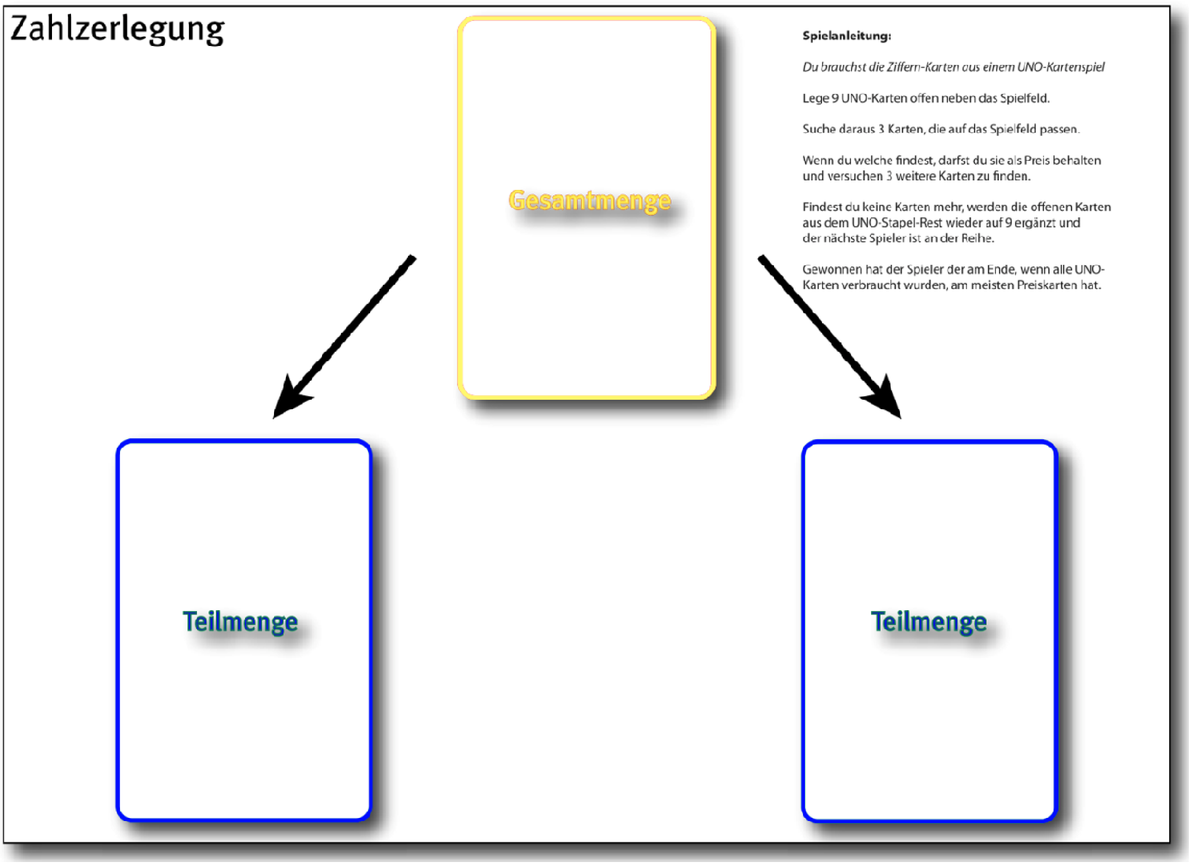
10 – 7 = 3
10 – 3 = 7

Es zeigt sich, dass bei **Plusaufgaben** die Teilmengen vertauscht werden können, die Gesamtmenge aber immer „hinter" dem Gleichheitszeichens steht, da die Gesamtmenge die Kombination der beiden Teilmengen ist.
Bei **Subtraktionen** steht die Gesamtmenge vor dem Minuszeichen, da aus dieser gesamten Menge eine Teilmenge herausgelöst wird. Die andere bleibt übrig. Welche Teilmenge herausgelöst wird und welche übrig bleibt ist austauschbar.

Dieser schematische Zusammenhang zeigt das **„<u>Teile/Ganze-Schema</u>"**.

Ist das alles verstanden, sollten die Zahlzerlegungen aller Zahlen aus dem Zahlenraum bis Zehn automatisiert, also auswendig gelernt werden. Das ist ebenso wichtig, wie später das Erlernen des Einmaleins. Mit der Automatisierung der Zahlzerlegung sind durch das Teile-Ganze-Schema quasi nebenbei auch die Additions- und Subtraktionsaufgaben automatisiert.

Zum Erlernen der Automatisierung benutze ich u.a. dieses Spiel:



IX. Platzhalteraufgaben

Es wird nun Zeit, sich analytischen Aufgaben zu widmen. Damit sind Platzhalteraufgaben gemeint, die nach einer der Komponenten vor dem Gleichheitszeichen suchen. Eine beliebte „Falle" für dyskalkule Kinder sind hier Aufgaben wie:

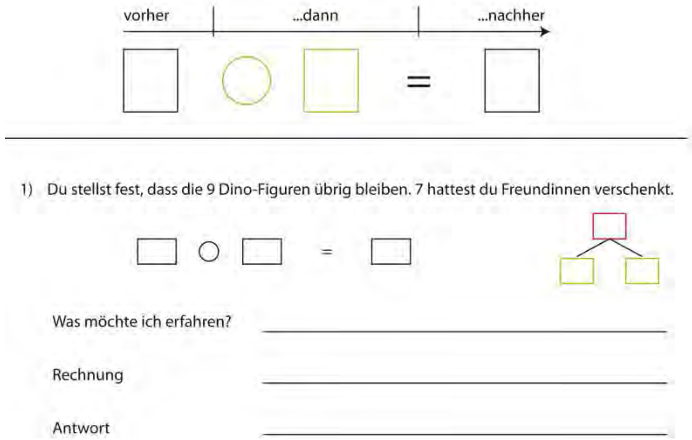
_?_ - 7 = 2

Diese symbolisch oftmals mit „5-7=2" falsch gelöste Aufgabe erscheint in einem ganz anderen Licht, wenn man die „Story" betrachtet, die zu einem solchen Term geführt haben könnte.
Dazu bemühen wir die Eigenschaft, dass Terme von links nach rechts gelesen einem **„Kausalitäts-Schema"** folgen:

- „**Vorher**" (Die erste Zahl, versehen mit einem Attribut)
- „**Dann**" (Rechenzeichen und zweite Zahl, versehen mit einem Attribut)
- „**Nachher**" (Die Zahl auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens, mit einem Attribut)

Angenommen eine Geschichte soll zu dem Term gefunden werden. Es soll sich um Blumen handeln: „Ich weiß nicht, wie viele Blumen **vorher** in meinem Beet standen. Aber **dann** pflückte ich 7 Stück für meine Mutter und **nachher** standen nur noch 2 Blumen da.“
Jetzt erkennen die Kinder, dass vorher nicht 5 Blumen dort gestanden haben können und knobeln die richtige Zahl heraus. Falls sie schon das Teile-/Ganze-Schema verinnerlicht haben, berechnen die Kinder die gesuchte Zahl sogar, denn sie wissen: Bei einer Subtraktion steht die Gesamtmenge vor dem Minuszeichen. Die schon angegebenen Zahlen 7 und 2 müssen also die Teilmengen sein, aus der sich das gesuchte Gesamte ergibt: In diesem Fall 9.

Lassen sie die Kinder zu den nachstehenden Aufgaben die Stories mit vorgegebenem Thema erzählen und dann ausfüllen. Mengenskizzen und das passende Teile-/Ganze-Schema können das Verständnis vertiefen:



Die Zahlzerlegung, das Teile-Ganze-Schema und das Kausalitätsschema lassen sich auf eine Vielzahl von späteren Rechenfertigkeiten transferieren:

- die Ergänzung auf einen vollen Zehner, Hunderter…
- die Zehnerüberschreitung
- Zahlenmauern
- Analytische Sachaufgaben
- Äquivalenzumformungen
- Bruchrechnen
- Prozentrechnen

X. Aufbruch in den Hunderterraum

Ausgerüstet mit diesem Handwerkszeug kann als nächstes der Hunderterraum ergründet werden. Hier soll nur angedeutet werden, wie die Basisoperationen durch Transfer im Zahlenraum bis 100 ihre Dienste leisten können. Obwohl man sich aus praktikablen Gründen langsam vom Rechnen mit Attributen verabschiedet, sollte man darauf immer wieder zurück greifen, wenn es Verständnis-Schwierigkeiten gibt. Die Kinder sollen nicht erneut in die Auffassung verfallen, dass Rechnen nur auf symbolischer Ebene stattfindet. Textaufgaben sollten ein wesentlicher Bestandteil bleiben. Vermeiden sie zudem das Rechnen mit Zahlenstrahlen und Hunderter-Tafel. Diese stellen die Zahlen ordinal dar und nicht als Menge. Außerdem verführen diese Materialien dazu, als „Taschenrechner" missbraucht zu werden.

Die Erarbeitung der Bedeutung eines Zehners steht am Anfang der Arbeit. Dies ist nicht so leicht, wie es sich zunächst anhört, denn für viele Kinder sind Zehner ein völlig neues Element in der Mathematik. Dass ein Zehner nur der Name für ein Bündel ist, in das man 10 einzelne Objekte verpackt hat, entgeht sehr vielen Kindern. Das merkt man zum Beispiel bei nebenstehenden Übungsaufgaben.

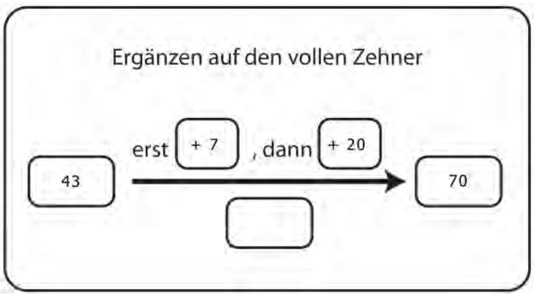
Wie heißt die Zahl?

fünfzehn	______	21 E 7 Z	______
3 Z 5 E	______	neununddreißig	______
40 + 8	______	8 E 0 Z	______
8 E 6 Z	______	4 Z 13 E	______
9 Z 0 E	______	zweiundvierzig	______

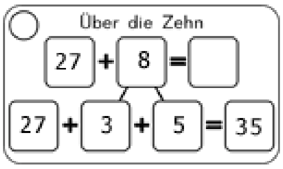
Dass Zehner nur eine spezielle Bündelung von Einern sind, dass unsere Zahlen in tabellarischer Schreibweise geschrieben werden (Z|E) und dass es zwischen Zahlen, wie 30 und 40 auch noch Zahlen gibt, ist nicht selbstverständlich und sollte sicher erarbeitet werden. Ob das gelungen ist, können sie nochmal überprüfen, indem sie in einer Stunde thematisieren, was die Hälfte von einer Menge ist und dann die Menge „30" eigenständig halbieren lassen.

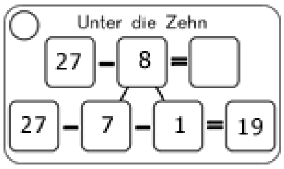
Für schnelle Erfolgserlebnisse sorgt das anschließende Rechnen innerhalb von Zehnern. Viele Kinder, die zuvor nur zählend gerechnet hatten, sind überwältigt, dass sie nun Aufgaben, wie 13+4, 53+4 oder 73+4 durch einfachen Transfer genauso leicht lösen können, wie 3+4, da sie die „Zehnerbündel" nur zu der Aufgabe hinzugesellen müssen.

Bei beherrschter und automatisierter Zahlzerlegung sollte auch das Ergänzen auf den nächsten Zehner keine große Schwierigkeit bereiten und nach diesem Schritt auf einen beliebigen anderen „ganzen Zehner" zu ergänzen, sollte auch schnell verstanden sein. Mit diesem Wissen, kann man das beliebte Thema „Wechselgeld" beim Einkaufen angehen. Mit Spielgeld und glatten Euro-Beträgen.



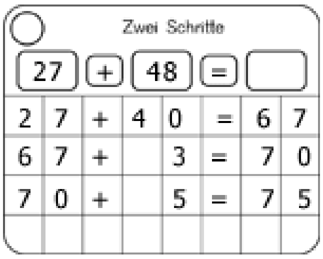
Dass die mühsam auswendig gelernte Zahlzerlegung nun zum Über- und Unterschreiten der Zehner genutzt werden kann, wird immer mit Freude aufgenommen.

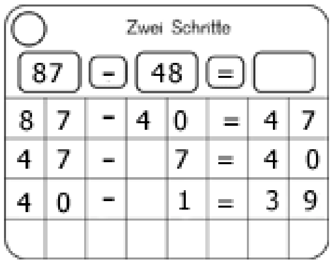




Aber nur, wenn die Zahlzerlegung wirklich verstanden und automatisiert ist, werden die Kinder mit diesem Schema auch entsprechende Kopfrechenaufgaben lösen. Bedeutet diese Strategie für die Kinder eine Anstrengung, werden sie auf das „einfachere“ Zählen zurückfallen. Man sollte sich also nicht verleiten lassen diesen Schritt voreilig anzugehen.

Danach können durch das Rechnen in mehreren Schritten alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 verständig bewältigt werden.



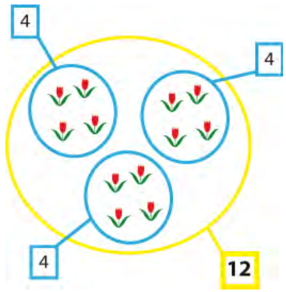


Der zweite Schritt, den ich im obigen Beispiel wegen der Zehnerüberschreitung hinzugefügt habe, kann von den Kindern zu dem Zeitpunkt meist schon im Kopf bewältigt werden.

Bitte achten sie beim ersten Schritt darauf, dass die Einer mitgeführt werden. Strategien, die zunächst die Zehner getrennt und dann die Einer gesondert berechnen, funktionieren nur vollständig bei der Addition und erfordern, dass die Kinder für die Subtraktion teilweise eine andere Strategie anwenden müssen. Zum anderen entspricht das nicht dem Kausalitätsprinzip: Zur ersten oben genannten Aufgabe kann man die Rechengeschichte erfinden: „27 Zuschauer sitzen bereits im Zirkus. Dann kommen 48 hinzu.“ Zuerst 20 + 40 zu rechnen macht auf die Realität übertragen wenig Sinn. Aus welchem Grunde sollte man von den bereits 27 vorhandenen Zuschauern erst einmal 7 entfernen, um dann 20 plus 40 zu rechnen, um die 7 dann wieder mit weiteren 8 hinzukommenden Zuschauern zu vermengen (7+8=15) und dann wieder Platz nehmen zu lassen (60+15)?

XI. Multiplikation/Division

Eine ernstzunehmende Hürde ist noch der Einstieg in die Multiplikation und Division. Hier bereitet meistens nicht das Errechnen der Ergebnisse die größte Schwierigkeit, sondern das Verstehen dieser Operationen.
Es hilft uns der Transfer der bei der Addition erlangten Kompetenzen, denn die Multiplikation ist die Addition gleicher Summanden. 3 x 4 ist die Kurzschreibweise für 4+4+4. In einer Mengenskizze lässt sie sich dementsprechend einfach zeichnen.



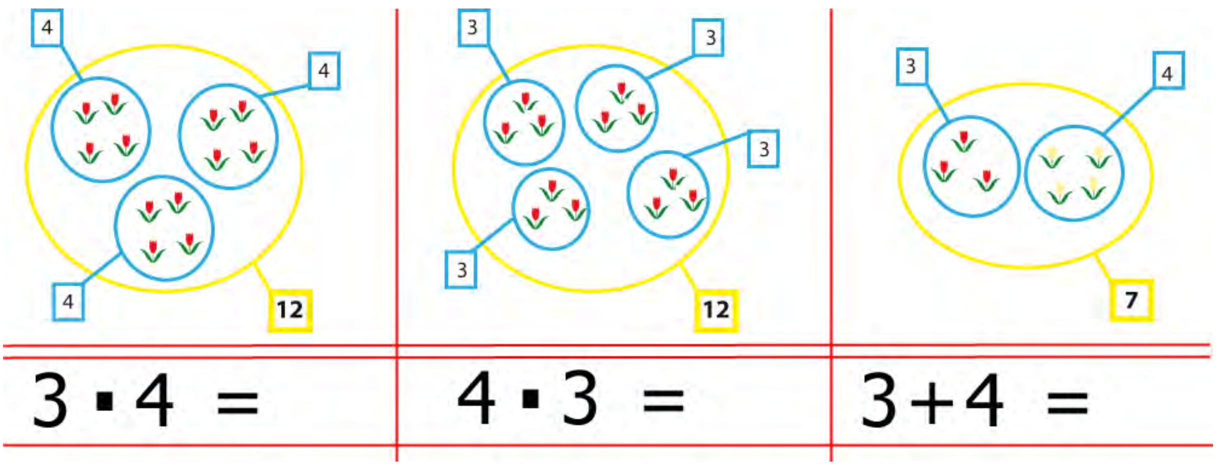
Die symbolische Schreibweise besitzt einen neuen Aspekt, nämlich den Multiplikator (Erste Zahl in der Malaufgabe). Diese erste Komponente gibt nicht, wie bei einer Addition, eine Teilmenge an, sondern ist nur ein „wie-oft“-Aspekt.

Im Beispiel der Aufgabe 3 x 4 = 12 haben wir die 3 Komponenten:

- Multiplikator („3 x“), der angibt, wie oft eine Teilmenge vorhanden ist
- Multiplikand („4“), die eigentliche Teilmenge, die mehrfach vorkommt
- Produkt („ 12“), die Gesamtmenge, die sich aus Multiplikator mal dem Multiplikand ergibt.

Der Multiplikator gibt ein Bündelungsformat an, in das die eigentlichen Teilmengen strukturiert werden. „In 3 Blumenkästen habe ich jeweils 4 Tulpen gepflanzt“. Den Kindern wird oft mitgegeben, dass „3 mal 4“ dasselbe sei, wie „4 mal 3“. Lassen sie sie nicht in diesem Glauben. Die Mengen-Skizzen und auch die passenden Rechengeschichten offenbaren hier den Unterschied, wenn auch das Produkt, quantitativ betrachtet, dasselbe ist. Und etwas ganz anderes ist natürlich die Addition 3+4.

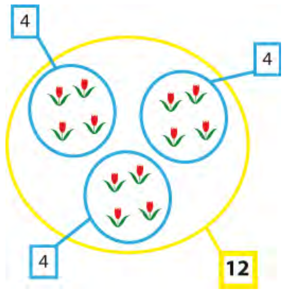
Als Diskussionsgrundlagen könnten sie von den Kindern „3x4“, „4x3“ und „3+4“ als Mengenskizzen zeichnen und dazu Rechengeschichten erfinden lassen. Sprechen sie mit den Kindern über die Unterschiede.



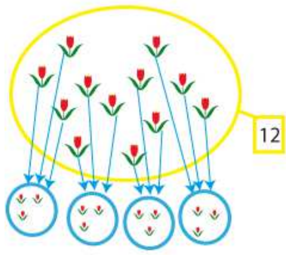
Die Division ist dann der anspruchsvollste Schritt. Günstig ist es, die Division nicht als wieder eine neue Rechenart einzuführen, sondern schon zusammen mit der Multiplikation zu thematisieren.

Für das **Einteilen** kann sogar dasselbe Mengendiagramm benutzt werden:

Ich habe 12 Tulpen. Immer vier sollen in einen Blumenkasten gepflanzt werden. Immer 4 Tulpen werden zusammengefasst und die Anzahl der „Bündel“ ergibt die gesuchte Anzahl der benötigten Blumenkästen. Die Umkehraufgaben 3 mal 4 ist sofort ersichtlich.



Das **Verteilen** sieht ein wenig anders aus: „12 Tulpen sollen auf vier Blumenkästen verteilt werden.“ Hier muss die Gesamtmenge aufgelöst werden. Die einzelnen Objekte, werden, wie beim Karten geben, verteilt. Man kann das Ergebnis dann ablesen: Drei Tulpen können in jeden Kasten gepflanzt werden. Die ersichtliche Umkehraufgabe ist hier 4 mal 3.



Zu beiden Geschichten passt die Division **12 : 4 = 3**. Die Umkehraufgabe ist jedoch jeweils verschieden, sowie das dem jeweiligen Ergebnis zugeteilte Attribut.
Beim **Einteilen** wird der Multiplikator der Umkehraufgabe 3x4=12 ermittelt, nämlich wie oft man ein 4er-Bündel schnüren kann, beim **Verteilen** wird der Multiplikand der Umkehraufgaben 4x3=12 ermittelt. Die Anzahl der Bündel wurde vorgegeben und die Größe der Teilmengen wurde gesucht.
Beim **Einteilen** entspricht das Attribut des Ergebnisses dem des Bündelungsformates, in diesem Fall „Blumenkästen“. Beim **Verteilen** ist das Attribut das gleiche, wie das der zugrunde liegenden Gesamtmenge, nämlich „Tulpen“.

Man kann nicht erwarten, dass diese schwierige Attribut-Beziehung vollständig von Grundschülern verstanden wird. Eine Thematisierung hilft jedoch später komplexere Division zu lösen.

Zum Beispiel die Division 1000:100 bei dem viele Kinder, die nur schematisch arbeiten, mit der Anzahl der Nullen durcheinander geraten, kann durch die Erkenntnisse in den Grundlagen auf die Frage „Wie oft passt die 100 in die 1000?“ reduziert werden. Mit einer Vorstellung der entsprechenden Mengen lässt sich nun das Ergebnis 10 ganz einfach ermitteln.

XII. Schlusswort

Mit diesen Grundlagen können dann durch Transfer die weiteren Kompetenzen schnell hergeleitet und verstanden werden:

- Größere Zahlen beruhen auf der dekadischen Zahlenschreibweise. Das heißt eine weitere Stelle links ist in der Wertigkeit das 10fache der rechts davon stehenden Stelle.
- Die Über-/Unterschreitung von Hundertern, Tausendern usw. geschieht analog zur Zehnerüberschreitung.
- Eine Gesamtmenge wird durch Subtraktion oder Division zerlegt oder aus Teilmengen mittels Addition oder Multiplikation zusammengesetzt.
- Alle Terme lassen sich in Rechengeschichten umwandeln, die eine Überprüfung der Plausibilität von gefundenen Lösungen erleichtern.

Schwierige Themen, die bleiben sind:

- Dezimalbrüche (eigentlich nur eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems nach rechts)
- Brüche (deren Nenner in Teilmengen man aber als Attribut auffassen kann)
- Dimensionierte Maße (z.B. Strecken, Flächen, Volumen, Gewichte, Uhrzeit)

Zur Unterstützung der Automatisierung von Zahlzerlegung und Operationen empfehle ich:

www.betzold.de/schnelles-rechnen-im-dreieck/p-87080.html

www.ivohaas.de (suche nach „abwischbare Rechenboards“)

http://www.idee-gestaltung-medien-unterricht.de (suche nach „Rechenstempel“)